



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

# Унети наслов тематске јединице која се обрађује



Радна недеља	Тематска целина		Циљ
4	<b>Нумеричке методе за решавање нелинеарних једначина</b>		Овладавање методама за решавање нелинеарних једначина
	Тематска јединица	Теореме о фиксној тачки	Студент ће бити упознат са теоремом о фиксној тачки и способан да је примени.
		Метода итерације	Студент ће бити способан да примени теореме о фиксној тачки на методу итерације, као и да методу итерације примени на решавање нелинеарних једначина.
		Њутн – Рафсонова метода	Студент ће бити упознат са Њутн – Рафсоновом методом и способан за њену примену на конкретаном проблему.

# Унети наслов тематске јединице која се обрађује



Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
4	Теореме о фиксној тачки	Студент ће бити упознат са теоремом о фиксној тачки и способан да је примени.
4	Метода итерације	Студент ће бити способан да примени теореме о фиксној тачки на методу итерације, као и да методу итерације примени на решавање нелинеарних једначина.
4	Њутн – Рафсонова метода	Студент ће бити упознат са Њутн – Рафсоновом методом и способан за њену примену на конкретаном проблему.

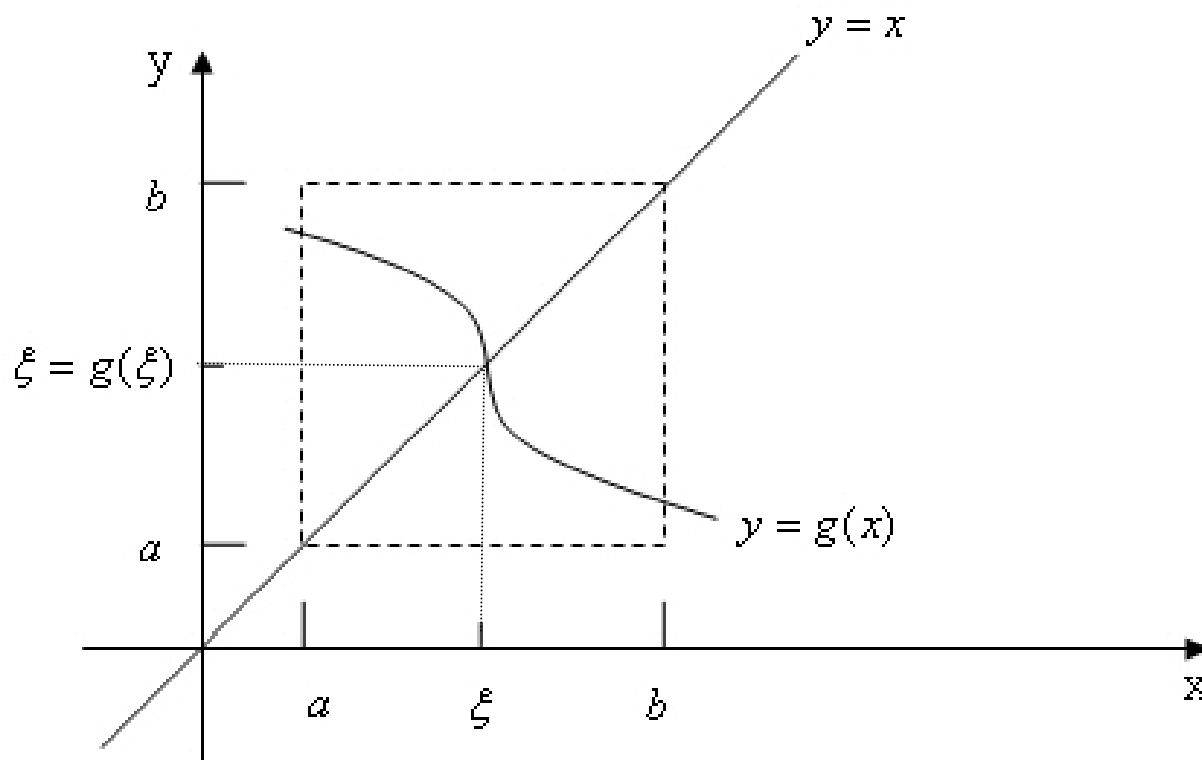
**НАСТАВНИ МЕТОД:**  
**Предавање**

# Teoreme o fiksnoj tački



**Definicija 1:** Neka  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Kažemo da je  $x$  fiksna ili nepokretna tačka preslikavanja  $g$  ako je

$$x = g(x)$$



# Teoreme o fiksnoj tački



**Teorema 1 (Šauderova):** Neka je  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  i neka je  $g$  neprekidno preslikavanje. Tada  $g$  ima bar jednu nepokretnu tačku.

**Dokaz:**

$$F(x) = x - g(x)$$

Ako je  $a = g(a)$  ili  $b = g(b)$  onda je  $a$ , odnosno  $b$  nepokretna tačka.

U protivnom je  $a < g(a)$  i  $b > g(b)$ , pa je

$$F(a) = a - g(a) < 0$$

$$F(b) = b - g(b) > 0.$$

Obzirom da je  $F$  neprekidna funkcija, postoji  $\xi \in (a, b)$  takvo da je  $F(\xi) = 0$  tj.  $\xi = g(\xi)$ .

# Teoreme o fiksnoj tački; Metoda iteracije

**Teorema 2:** Neka je  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  diferencijabilna funkcija za koju postoji  $L \in [0, 1)$  tako da je

$$(\forall x \in [a, b]) |g'(x)| \leq L < 1.$$

Tada  $g$  ima tačno jednu nepokretnu tačku.

## **Dokaz:**

Funkcija  $g$  je neprekidna (jer je diferencijabilna) pa ima bar jednu nepokretnu tačku. Dokažimo da funkcija ne može imati dve nepokretne tačke. Ako pretpostavimo da  $g$  ima dve nepokretne tačke,  $x_1$  i  $x_2$ , bilo bi

$$|x_1 - x_2| = |g(x_1) - g(x_2)| = |g'(c)(x_1 - x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

(Kontradikcija!)

## **METODA ITERACIJE**

Jednačina

$$f(x) = 0$$

se na  $[a, b]$  zamenjuje ekvivalentnom

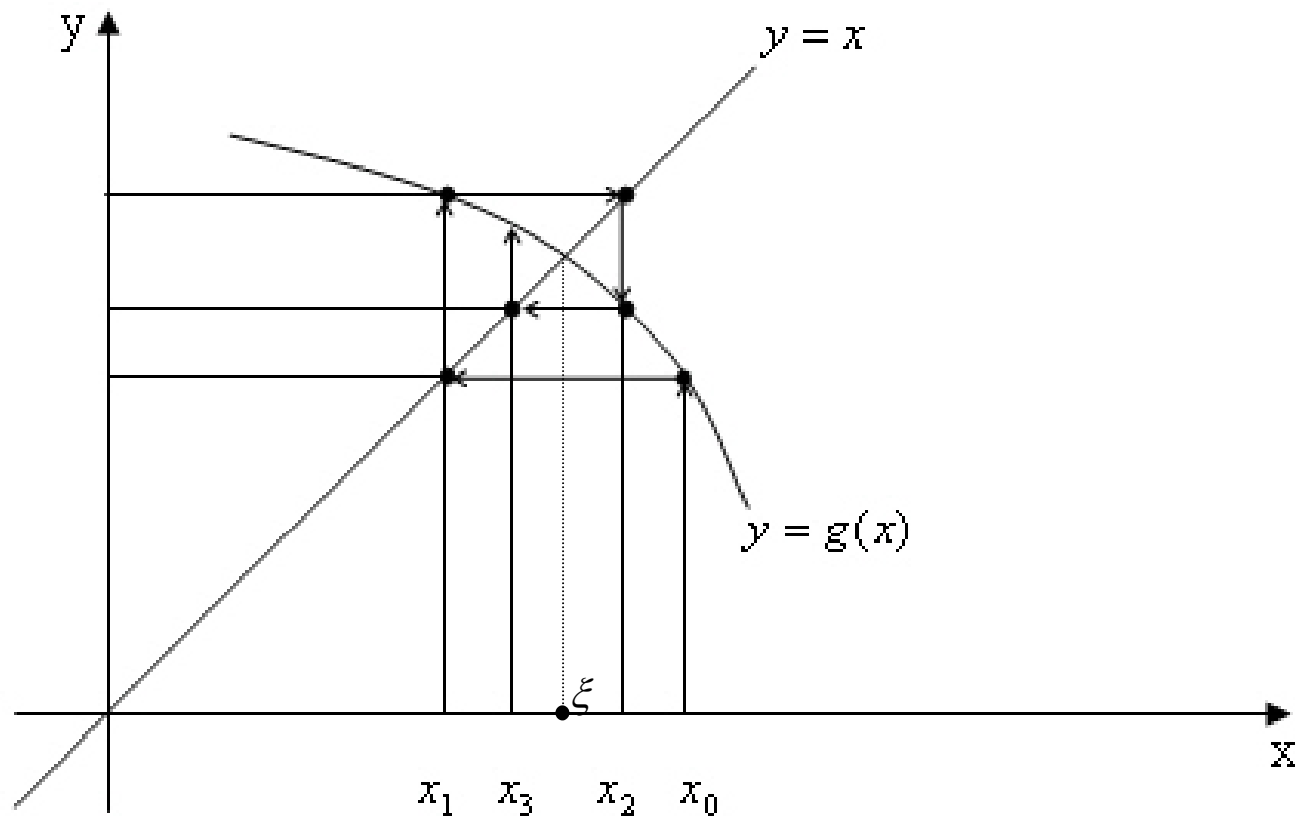
$$x = g(x).$$

# Metoda iteracije



Generiše se niz  $\{x_n\}$  :

$$x_0 \in [a, b], \quad x_n = g(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$



# Metoda iteracije



## **Teorema 3 (dovoljni uslovi konvergencije metode iteracije):**

Neka diferencijabilna funkcija  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  zadovoljava uslov

$$(\exists L \in [0, 1))(\forall x \in [a, b]) |g'(x)| \leq L < 1.$$

Tada niz  $\{x_n\}$  konvergira ka fiksnoj tački  $\xi$  funkcije  $g$  i za svaki prirodan broj  $n$  važi ocena

$$|x_n - \xi| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

**Dokaz:** Važi

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |g(x_{n-1}) - g(\xi)| = |g'(c_n)(\xi - x_{n-1})| \leq L |x_{n-1} - \xi| \leq \\ &\dots \leq L^2 |x_{n-2} - \xi| \leq \dots \end{aligned}$$

Posle  $n$  koraka dobija se

$$|x_n - \xi| \leq L^n |x_0 - \xi| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$



# Metoda iteracije



Iz

$$|x_0 - \xi| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi|$$

sledi

$$|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{1-L} |x_0 - x_1|,$$

pa je

$$|x_n - \xi| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

## **Napomena:**

Ocena greške može se dobiti iz poslednje dve iteracije. Iz

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &= |g(x_n) - g(\xi)| = |g'(c_n)(x_n - \xi)| \leq L|x_n - \xi| = \\ &= L|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi| \leq L(|x_{n+1} - x_n| + |x_{n+1} - \xi|) \end{aligned}$$

sledi

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{L}{1-L} |x_{n+1} - x_n|.$$

specijalno za  $0 \leq L \leq 0.5$  je

$$|x_{n+1} - \xi| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

## **Teorema 4 (dovoljan uslov lokalne konvergencije):**

Neka je  $\xi$  fiksna tačka funkcije  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  i neka je  $g'(x)$  neprekidna u otvorenom intervalu koji sadrži  $\xi$ . Ako je  $|g'(\xi)| < 1$ , onda postoji  $\varepsilon > 0$  tako da niz definisan sa

$$x_0 \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon), \quad x_n = g(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergira nepokretnoj tački funkcije  $g$ .

## **Dokaz:**

Neka  $L \in (|g'(\xi)|, 1)$ . Tada postoji  $\varepsilon > 0$  tako da je

$$(\forall x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]) |g'(x)| \leq L < 1,$$

zbog neprekidnosti  $g'(x)$  na  $[a, b]$ .

Funkcija  $g$  preslikava segment  $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$  na samog sebe:

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = |g'(c)(x - \xi)| \leq L|x - \xi| \leq L\varepsilon < \varepsilon$$

# Njutn – Rafsonova metoda



## NJUTN – RAFSONOVA METODA ( METODA TANGENTI )

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

$$g(x) = x + h(x)f(x)$$

$$g'(x) = 1 + h'(x)f(x) + h(x)f'(x)$$

$$g'(\xi) = 1 + h(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow h(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}, h(x) = -\frac{1}{f(x)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, \dots); \quad x_0 \in [a, b] \quad (1)$$

**Teorema ( o lokalnoj konvergenciji ):** Neka je  $f''(x)$  neprekidna funkcija i  $f'(x) \neq 0$  u nekom otvorenom intervalu koji sadrži  $\xi$  gde je  $f(\xi) = 0$ .

Tada postoji  $\varepsilon > 0$  tako da niz definisan sa (1) konvergira ka  $\xi$  ako je  $|x_0 - \xi| < \varepsilon$ .

# Njutn – Rafsonova metoda



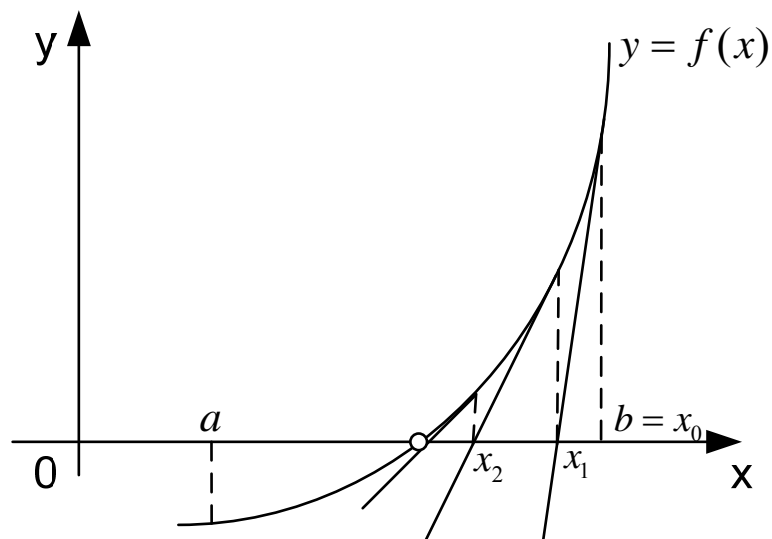
## Dokaz:

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Obzirom da je  $g'(\xi) = 0$  i  $g'$  neprekidna funkcija, postoji  $\varepsilon > 0$  i  $L$ ,  $0 < L < 1$  i takvo da je  $|g'(x)| \leq L < 1$ ,  $(\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon))$ .

Na osnovu Teoreme 3 sledi da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

## Geometrijska interpretacija:



# Njutn – Rafsonova metoda



**Teorema ( o izboru početne aproksimacije ):** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  dva puta neprekidno diferencijabilna i neka je  $f(a)f(b) < 0$ . Ako su  $f'$  i  $f''$  stalnog znaka na  $[a, b]$  i  $x_0 \in [a, b]$ :

onda niz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1)$$

konvergira rešenju  $\xi$  jednačine  $f(x) = 0$ .

**Dokaz:** Pretpostavimo da je  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ;  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$

Niz  $\{x_n\}$  je ograničen odozdo sa  $\xi$ :

1°  $n=0$ :  $x_0 > \xi$  jer je  $f(x_0) > 0$  i  $f$  je monotonno rastuća

2° pretpostavka:  $x_k > \xi$  (za neko  $k$ )

$$3^\circ \quad f(\xi) = f(x_k + (\xi - x_k)) = f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(\xi - x_k) + \frac{f''(\theta_k)}{2!}(\xi - x_k)^2$$

Obzirom da je  $f(\xi) = 0$  i  $\frac{f''(\theta_k)}{2!}(\xi - x_k)^2 > 0$  sledi da je

$$f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(\xi - x_k) < 0,$$

# Njutn – Rafsonova metoda



odnosno

$$\xi < x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1}$$

(Kraj dela dokaza mat. indukcijom)

Niz  $\{x_n\}$  je monotonno opadajući:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0,$$

pa postoji  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \geq \xi$ .

Ako u (1) pređemo na graničnu vrednost kad  $n \rightarrow \infty$ , dobijamo

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)},$$

odnosno  $f(c) = 0 \Rightarrow c = \xi$  jer je  $\xi$  jedinstven koren jednačine na intervalu  $(a, b)$

# Njutn – Rafsonova metoda



**Teorema ( o oceni greške ):** Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2$$

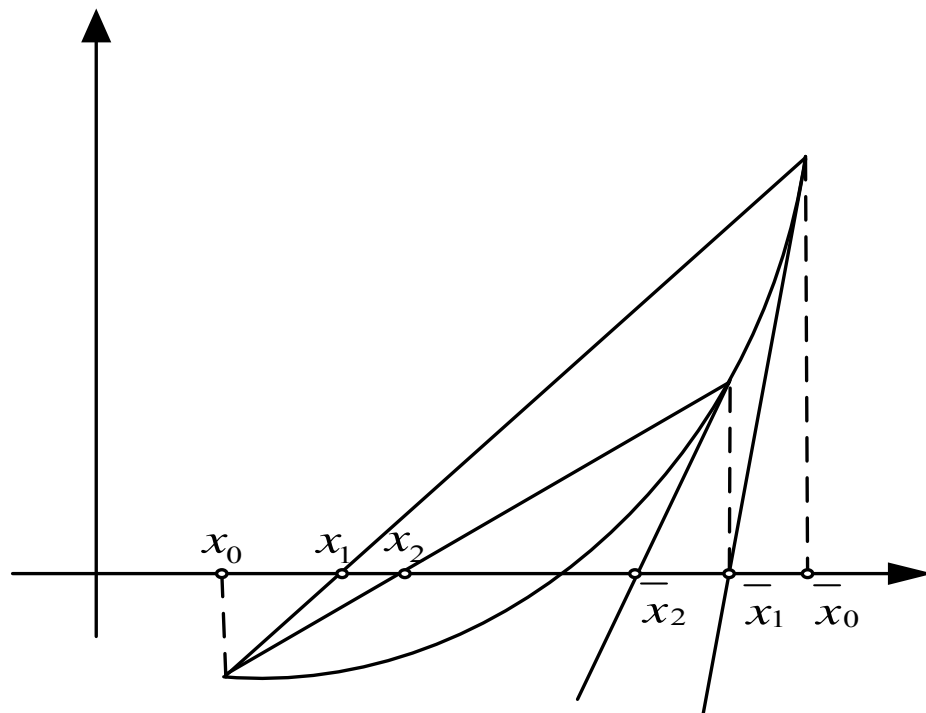
**Dokaz:**

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(c)}{2}(x_n - x_{n-1})^2 = \\ &= f(x_{n-1}) - \frac{f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(c)}{2}(x_n - x_{n-1})^2 = \frac{f''(c)}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \end{aligned}$$

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} = \frac{|f''(c)|}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Konvergencija metode je kvadratna.

## KOMBINOVANA METODA



$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(x_n), \quad (n=0, 1, \dots)$$

$$\xi \approx x_n^* = \frac{\bar{x}_n + x_n}{2}$$



## ПИТАЊА:

1. Формулисати и доказати Шаудерову теорему о егзистенцији фиксне тачке.
2. Формулисати и доказати теорему о јединствености фиксне тачке.
3. Којим поступком се решавање једначине  $f(x)=0$  своди на одређивање фиксне тачке?
4. Објаснити идеју методе итерације.
5. Формулисати и доказати теорему о довољном услову конвергенције методе итерације.
6. Објаснити идеју Њутн – Рафсонове методе.
7. Формулисати и доказати теорему о локалној конвергенцији Њутн – Рафсонове методе.
8. Навести главне елементе доказа теореме о избору почетне апроксимације.
9. Извести оцену грешке Њутн – Рафсонове методе.
10. Које две методе користи комбинована метода. Како?



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА